UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA
Facultad de Ciencias Medioambientales -Toledo-
Ciencias Ambientales 2006-2007.
Primer curso.
EXAMEN de FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS
Miércoles, 31 de enero de 2.007.
INSTRUCCIONES GENERALES

- Los alumnos que aprobaron el examen parcial han de elegir **4 entre los ejercicios 2, 3, 4, 5, 6 y 8.** Todos tienen la misma puntuación.

- Loa alumnos que no aprobaron el examen parcial contestarán a 6 ejercicios: **los ejercicios 1, 3, 6, 7, y eligen uno entre el 2 y el 8, y otro entre el 4 y el 5.** Los 6 problemas tienen la misma puntuación.

EJERCICIOS

1. Estudiar las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

según los valores de λ.

2. Se supone que la posición de una partícula en el plano, en el instante t, esta determinada por la posición en el instante $t-1$ según las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Si la posición inicial es $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tal que, $x_0 + y_0 = 1$, estudiar la posición límite de la partícula al hacer $t \to +\infty$

3. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1},$$

se pide:

(a) Dominio.

(b) Asíntotas.

(c) Monotonía (crecimiento y decrecimiento) y extremos relativos.

(d) Representación Gráfica (utilizando los cálculos anteriores).

4. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, sabiendo que

$$\int_0^a x.e^x dx = 1.$$

5. Halla el Polinomio de Taylor de grado 2 de la función

$$f(x) = \arctan(x+1)$$

en torno a $x = 0$ (Desarrollo de McLaurin). Utiliza el resultado anterior para calcular aproximadamente el valor de $\arctan(1.2)$.

6. Determina a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + a; \text{ si } x \leq 0 \\ bx + 6; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en su dominio.

7. "PARADOJA DEL CORREDOR" - Zenón de Elea (495-435 a.C.) - *Un corredor nunca puede llegar a la meta. En efecto, para correr, debe cubrir primero la mitad del trayecto, luego la mitad de la distancia que queda, luego la mitad de la mitad,...y así sucesivamente.*
Supongamos que la velocidad es constante y que tarda T minutos en recorrer la primera mitad.
Hállese una SERIE que describa el tiempo total que necesita para recorrer la totalidad del trayecto y calcúlese dicho tiempo (Suma de la SERIE).

8. Resuelve el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases},$$

junto con el dato inicial $(x(0), y(0)) = (2, 3)$.

SOLUCIONES

1. Realizamos operaciones elementales con la matriz ampliada asociada. suponemos paraa ello que $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1\text{-}\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda^2-1 & \left(\lambda^2-\lambda\right)(\lambda+1) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \left(\lambda^2-1\right)(\lambda+1) \end{array}\right)$$

Vemos claramente que si $\lambda \neq 0, 1, -1, -2$ entonces $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = 3 = n$, y por el Teorema de Rouché-Frobenius se trata de un sistema compatible determinado.
Supongamos que $\lambda = 0$: entonces el rango de la matriz ampliada es 3, debido a que

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Se trata, gracias al Teorema de Rouché-Frobenius, de un sistema compatible determinado.
Si $\lambda = 1$ entonces $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = 1 < n = 3$, es pues un sistema compatible indeterminado (gracias al Teorema de Rouché-Frobenius).
Si $\lambda = -1$ tenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

con lo que $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = n$ y se trata, gracias al Teorema de Rouché-Frobenius, de un sistema compatible determinado.

Si $\lambda = -2$ obtenemos un sistema incompatible, para ello basta con realizar operaciones elementales y usar el Teorema de Rouché-Frobenius. En este caso $n = r\left(\overline{A}\right) = 3 > r(A) = 2$.

2. Se deduce con facilidad que si $J = C^{-1}AC$, ó $A = CJC^{-1}$, entonces

$$A^t = CJ^tC^{-1},$$

y si J es diagonal, digamos que

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$J^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix}$$

Por tanto si J es la forma diagonal de la matriz A, donde

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

entonces los autovalores y autovectores asociados son (se omite el cálculo)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1$$

y

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{3}.$$

De esta manera tenemos que la fórmula

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se escribe

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0 + y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t x_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t y_0 \\ \frac{1}{2}(x_0 + y_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puesto que $(1/3)^t \to 0$ cuando $t \to +\infty$,

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0+y_0) \\ \frac{1}{2}(x_0+y_0) \end{pmatrix}$$

y como $x_0 + y_0 = 1$ entonces la posición límite es

$$l = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Resolvemos el sitema

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}, (x(0), y(0)) = (2, 3)$$

que escrito en forma compacta es

$$X' = AX$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos $A : D = C^{-1}AC$ ó $A = CDC^{-1}$ donde

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Así $X' = AX$ se transforma en

$$X' = CDC^{-1}X$$

que equivale a

$$C^{-1}X' = DC^{-1}X$$

esto es

$$Z' = DZ$$

siendo $Z' = C^{-1}X'$ y $Z = C^{-1}X$. Si $Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ entonces el sistema precedente es

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Sabemos que la solución general de éste es

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \exp t \\ C_2 \exp 4t \end{pmatrix}$$

De $Z = C^{-1}X$ se sigue que la solución general es

$$X = CZ = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \exp(t) \\ C_2 \exp(4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 e^t + C_2 e^{4t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

Como además debe cumplirse la condición inical $(x(0), y(0)) = (2, 3)$ entonces

$$\begin{aligned} 2 &= -2C_1 + C_2 \\ 3 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Se tiene que $C_2 = \frac{8}{3}, C_1 = \frac{1}{3}$, y la solución particular pedida es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} e^t + \frac{8}{3} e^{4t} \\ \frac{1}{3} e^t + \frac{8}{3} e^{4t} \end{pmatrix}$$